ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 69, № 2
ноябрь, 1986

МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Ахмедиев Н. Н., Корнеев В. И.

Найдено простейшее точное аналитическое решение нелинейного уравнения Шредингера из класса периодических решений, описывающее временную эволюцию волны с постоянной амплитудой, на которую наложено малое периодическое возмущение. Получены формулы для эволюции спектра этого решения и проведен их качественный анализ. Показано, что существует некоторый класс периодических решений, у которых действительная и мнимая части связаны линейным соотношением, и приведен пример однопараметрического семейства таких решений.

В последнее время большое внимание в научной литературе уделяется периодическим решениям нелинейных уравнений в частных производных [1] и, в частности, нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) (см. [2–5] и список литературы в этих работах). Это связано с тем, что периодические решения необходимы в ряде практически важных задач, например в задаче о генерации пикосекундных импульсов в оптическом волокне [6, 7], в проблеме самофокусировки [8, 9], в теории волн на глубокой воде [10, 11] и многих других. Особое место в классе периодических решений НУШ занимает решение, описывающее модуляционную неустойчивость,— рост длинноволновых периодических возмущений на фоне непрерывной волны с постоянной амплитудой. Начальный этап развития неустойчивости в этой задаче исследовался методом линеаризации [8, 9], а дальнейшая эволюция поля изучалась с помощью численного моделирования решений НУШ на ЭВМ [5, 6, 10, 11]. Эти исследования позволили во многом выяснить качественное поведение решения. В частности, было установлено, что начальный рост амплитуды возмущения в результате эволюции поля сменяется его последующим уменьшением и возвратом к исходному состоянию плоской волны, аналогичным возврату Ферми — Пасты — Улама в системе связанных осцилляторов, а при некоторых условиях решение становится осциллирующим и во времени. Точного аналитического решения рассматриваемой задачи в указанных работах, однако, не приводилось, что послужило стимулом для наших исследований. В данной работе мы получили точное решение задачи о модуляционной неустойчивости, выражающееся в элементарных функциях. Решение получено с помощью подстановки, линейно связывающей действительную и мнимую части искомой функции, в которой коэффициенты зависят только от времени. Показано, что такая связь справедлива для широкого класса периодических решений НУШ, и приведен пример однопараметрического семейства периодических по двум переменным решений, найденного с ее помощью.

Запишем пространственно-одномерное НУШ в следующем виде:

$$(1)\qquad i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+|\psi|^2\psi=0.$$

Обозначения здесь являются общепринятыми. Для удобства дальнейшего анализа произведем в (1) замену переменной с помощью соотношения $\psi(x, t)=u(x, t)e^{it}$, и тогда уравнение для комплексной функции $u(x, t)$ будет иметь вид

$$(2)\qquad i\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-u+|u|^2u=0.$$

Уравнение (2) имеет простейшее стационарное решение в виде комплексной константы $u=\exp i\varphi$, которое, как известно [6—11], неустойчиво относительно периодических по координате x возмущений вида $\cos k(x-x_0)$. Для таких возмущений первый член разложения решения вблизи точки $u=1$ (при $\varphi=0$) имеет вид

$$(3)\qquad u\approx 1+\left[a\left(1+i\frac{2\delta}{k^2}\right)e^{\delta t}+b\left(1-i\frac{2\delta}{k^2}\right)e^{-\delta t}\right]\cos k(x-x_0),$$

где a и b — два независимых малых параметра, x_0 — произвольная константа, $\delta=k(1-k^2/4)^{1/2}$ — инкремент нарастания неустойчивости, который действителен в интервале волновых векторов $0<k<2$ и принимает максимальное значение, равное единице, в точке $k=\sqrt{2}$. Ниже мы ограничимся рассмотрением дальнейшей эволюции возмущений типа (3) только с этим волновым вектором, т. к. он представляет наибольший интерес на практике.

Для нахождения искомого решения уравнения (2) представим его в виде явной комплексной функции $u=v+iw$. Тогда само уравнение (2) можно записать в виде системы для двух действительных функций v и w:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &v_t-w+{}^1/{}_2w_{xx}+(v^2+w^2)w=0,\\ &-w_t-v+{}^1/{}_2v_{xx}+(v^2+w^2)v=0.\end{aligned}$$

Предположим, что функции v и w связаны между собой линейным соотношением

$$(5)\qquad v=\eta w+\mu,$$

в котором коэффициенты η и μ зависят только от временной переменной. В данной работе мы рассмотрим случай $\eta=\mu=-\operatorname{th} t$ и примем

$$(5а)\qquad v=-\operatorname{th} t(w+1).$$

Для функций v и w, удовлетворяющих НУШ, подстановка (5) в (4) должна приводить к двум равносильным уравнениям относительно функции w. Исключая из этих двух уравнений вторую производную по x, после простых преобразований получим уравнение первого порядка относительно w (уравнение Бернулли):

$$(6)\qquad w_t+w^2\operatorname{th} t+w\operatorname{th} t=0.$$

Общее решение этого уравнения можно представить в виде

$$(7)\qquad w=c/(\operatorname{ch} t-c),$$

где $c=c(x)$ — константа интегрирования. Чтобы найти ее зависимость от x, подставим (7) в одно из уравнений, полученных подстановкой (5а) в (4). В обоих случаях получим уравнение

$$(8)\qquad C_{xx}+\frac{2C_x^2}{\operatorname{ch} t-C}-2\frac{1-C^2-C\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t-C}=0,$$

что свидетельствует о правомерности нашей подстановки. Несложно показать, что функция, удовлетворяющая (8) при любых t, должна быть решением уравнения

$$(9)\qquad C_x^2=1-2C^2,$$

откуда находим

$$(10)\qquad C=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}(x-x_0).$$

Подставляя (10) в (7), а затем (7) в (5а), получим действительную и мнимую части функции u, а следовательно, и полное решение уравнения (2) в виде

$$(11)\qquad u(x,t)=\frac{-\sqrt{2}\operatorname{sh} t+i\cos\sqrt{2}(x-x_0)}{\sqrt{2}\operatorname{ch} t-\cos\sqrt{2}(x-x_0)}.$$

Данное решение является простейшим из класса периодических решений НУШ. Нетрудно показать, что при $t\to-\infty$ решение (11) совпадает с разложением (3), в котором коэффициент $b=0$. При $t\to+\infty$ решение (11) совпадает с формулой (3), в которой $a=0$ и добавлен множитель $e^{i\pi}$, т. е. произвольная фаза φ в данном случае оказывается равной π. Таким образом, в результате развития неустойчивости амплитуда модуляции возрастает от нуля до максимального значения при $t=0$, а затем при $t\to\infty$ происходит возврат к стационарному решению с исходной амплитудой, но противоположной фазой φ.

Для периодических решений важным является вопрос об эволюции спектра исходной волны. В данном случае для спектра также можно выписать точные формулы. Представим решение (11) в виде разложения Фурье:

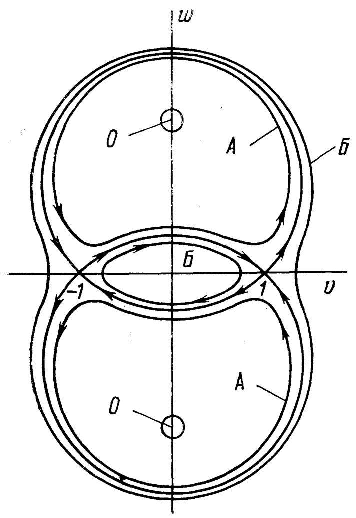
$$(12)\qquad u(x,t)=f_0(t)+2\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\cos[n(x-x_0)\sqrt{2}].$$

Коэффициенты в (12) легко вычисляются

$$(13)\qquad f_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_0^{\sqrt{2}\pi}u(x,t)\,dx=\frac{i\sqrt{2}\operatorname{sh} t+\sqrt{2}\operatorname{ch} t-\sqrt{2\operatorname{ch}^2 t-1}}{\sqrt{2\operatorname{ch}^2 t-1}},$$

$$(14)\qquad f_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_0^{\sqrt{2}\pi}u(x,t)\cos(nx\sqrt{2})\,dx=$$

$$= \sqrt{2}\,\frac{i\,\mathrm{sh}\,t+\mathrm{ch}\,t}{\sqrt{2\,\mathrm{ch}^2 t-1}}\,(\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,t-\sqrt{2\,\mathrm{ch}^2 t-1})^n.$$



Для суммы модулей коэффициентов $f_n(t)$ имеет место соотношение

$$|f_0(t)|^2+2\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(t)|^2=\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\int_0^{\sqrt{2}\,\pi}|u|^2\,dx=1. \tag{15}$$

Очевидно, при $t\to\pm\infty$ все $f_n(t)$ обращаются в нуль за исключением $|f_0(t)|^2=1$. При произвольном t все $f_n(t)$ отличны от нуля, однако энергия высших гармоник убывает по закону геометрической прогрессии. При $t=0$ квадраты модулей коэффициентов равны $|f_0|^2=(\sqrt{2}-1)^2$, $|f_n|^2=2(\sqrt{2}-1)^{2n}$. В этом случае максимальная энергия сосредоточена в первой боковой полосе.

В целях большей наглядности проведем анализ решения (11) на комплексной плоскости (v, w) (см. рисунок). Для определенности фиксируем переменную $x=x_0$, что никак не ограничивает общности рассмотрения. Точка $u=1$ на этой плоскости по аналогии с терминологией, принятой в теории нелинейных колебаний, является седловой, что легко видеть, построив вблизи этой точки траектории, описываемые формулой (3). Параметром этих траекторий служит t, а параметром семейства траекторий — отношение a/b. Две траектории выходят из точки $u=1$ под углами 45° и −135° к оси v, две входят в нее под углами −45° и 135°, а остальные траектории вблизи этой точки имеют вид гипербол. Такой же характер имеет поведение траекторий вблизи точки $u=-1$, что легко видеть, если домножить (3) на $e^{i\pi}$. Траектория, описываемая решением (11), представляет собой верхнюю часть окружности

$$v^2+(w-1)^2=2, \tag{16}$$

соединяющей точки ±1 по одному из вышеуказанных направлений. Решения, соединяющие точки ±1 по трем другим направлениям, легко получить из (11), изменяя знак перед u и/или осуществляя трансляцию $x\to x_0+\pi/\sqrt{2}$. На рисунке представлены все подобные траектории.

В случае, когда траектория проходит вблизи точек ±1, не попадая в них, решение получается периодическим по t, и полные траектории таких решений, полученные численными методами (подобными описанным в [12]), представлены на рисунке замкнутыми кривыми, близкими к сепаратрисным (16). Для решений с периодом по x, не зависящим от параметра a/b, фазовые траектории не пересекаются. Из рисунка видно, что сепаратрисные решения (11) отделяют друг от друга два качественно различных типа периодических по t решений. Пары траекторий типа A, симметричные относительно оси v, соответствуют одному и тому же решению, полученному трансляцией по x на $\pi/\sqrt{2}$. Траектории типа $Б$, симметричные относительно начала координат и расположенные за пределами сепаратрис, также имеют аналог, полученный трансляцией и расположенный внутри сепаратрис. Для периодических траекторий типа A имеется «центровая точка» O, соответствующая стационарному решению в виде эллиптической функции Якоби

$$u_0(x)=i\alpha k_0\,\mathrm{cn}[\alpha(x-x_0),\,k_0], \tag{17}$$

где $\alpha=(k_0^2-{}^1/_2)^{-1/2}$, а модуль эллиптической функции k_0 для рассматриваемого нами периода по x определяется из уравнения $\pi/\sqrt{2k_0^2-1}=2\mathbf{K}(k_0)$, в котором $\mathbf{K}(k_0)$ есть полный эллиптический интеграл первого рода.

Путем численного моделирования периодических решений НУШ мы установили, что для периодических по двум переменным решений справедлива линейная связь общего вида (5), в которой определенному решению соответствуют свои функции $\mu(t)$ и $\eta(t)$. Если учесть, что линейная связь действительной и мнимой частей u справедлива и для известных «простых» решений НУШ (семейства односолитонных решений с шириной солитона в качестве параметра, а также семейства стационарных решений типа (17)), то становится ясно, что существует довольно обширный класс решений НУШ, обладающих свойством (5). Регулярная процедура нахождения коэффициентов η и μ в (5), а вместе с ними и всего класса решений составляет предмет отдельной работы. В рамках данной статьи мы ограничимся примером однопараметрического семейства решений, найденных с помощью подстановки (5), в которой $\eta=-\mathrm{sn}(t,\,k)\mathrm{cn}(t,\,k)/\mathrm{dn}(t,\,k)$, $\mu=-\mathrm{sn}(t,\,k)$ выражаются через эллиптические функции Якоби с модулем k в качестве параметра. Для этих значений коэффициентов решение НУШ имеет вид

$$u(x,t)=k\frac{-\mathrm{sn}(t,k)+i(1/\sqrt{1+k})\,\mathrm{cd}(\sqrt{1+k}x,\sqrt{(1-k)/(1+k)})\,\mathrm{cn}(t,k)}{1-(1/\sqrt{1+k})\,\mathrm{cd}(\sqrt{1+k}\,x,\sqrt{(1-k)/(1+k)})\,\mathrm{dn}(t,k)} \tag{18}$$

где $\mathrm{cd}(z)=\mathrm{cn}(z)/\mathrm{dn}(z)$. Для этого семейства решений периоды по t и по x зависят от параметра k. При $k\to1$ (18) совпадает с решением (11), а при $k\to0$ вырождается в солитонное решение с фиксированной шириной $u=2ie^{it}/\mathrm{ch}\,2x$. Поскольку предельными случаями семейства (18) являются решения из других семейств с фиксированными параметрами, то класс решений, обладающих свойством (5), задается не менее чем двумя параметрами. Число этих параметров, однако, ограничено, поскольку двух- и вообще N-солитонные решения, а также периодические решения с двумя и более периодами по x уже не удовлетворяют соотношению (5). Таким образом, соотношение (5) выделяет из всего многообразия решений НУШ решения, которые можно назвать решениями первого порядка.

Литература

[1] *Новиков С. П.* В сб.: Солитоны. Ред. Р. Булаф, Ф. Кодри. М.: Мир, 1983, 348–362.
[2] *Итс А. Р., Котляров В. П.*– ДАН УССР, сер. А, 1976, № 11, 965–968.
[3] *Бабич М. В., Бобенко А. И., Матвеев В. Б.*– Изв. АН СССР, сер. матем., 1985, *49*, № 3, 511–529.
[4] *Ma Y. C., Ablowitz M. J.*– Stud. Appl. Math., 1981, *65*, № 2, 113–158.
[5] *Tracy E. R., Chen H. H., Lee Y. C.*– Phys. Rev. Lett., 1984, *53*, № 3, 218–221.
[6] *Hasegawa A.*– Opt. Lett., 1984, *9*, № 7, 288–290.

[7] *Anderson D., Lisak M.*— Opt. Lett., 1984, *9*, № 10, 468—470.
[8] *Беспалов В. И., Таланов В. И.*— Письма в ЖЭТФ, 1966, *3*, № 9, 471—475.
[9] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
[10] *Юэн Г., Лэйк Б.* В сб.: Солитоны в действии. Ред. К. Лонгрена, Э. Скотт. М.: Мир, 1981, 103—137.
[11] *Yuen H. C., Ferguson W. E.*— Phys. Fluids, 1978, *21*, № 8, 1275—1278.
[12] *Ахмедиев Н. Н., Корнеев В. И., Кузьменко Ю. В.*— ЖЭТФ, 1985, *88*, № 1, 107—115.

Поступила в редакцию
23.VII.1985 г.

MODULATION INSTABILITY AND PERIODIC SOLUTIONS OF NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

Akhmediev N. N., Korneev V. I.

The simplest exact analytical solution of the nonlinear Schrödinger equation is found which belongs to the class of periodic solutions. The solution describes the time evolution of a wave of constant amplitude with the small periodic perturbation. Formulas for the evolution of the spectrum of this equation are obtained and their qualitative analysis is performed. It is shown that there exists a certain class of periodic solutions whose real and imaginary parts are connected linearly with each other. The example of one-parametric family of such solutions is given.