

ГЕНЕРАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПИКОСЕКУНДНЫХ ИМПУЛЬСОВ В ОПТИЧЕСКОМ ВОЛОКНЕ. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Н. Н. Ахмедиев, В. М. Елеонский, Н. Е. Кулагин

Получены точные аналитические решения нелинейного уравнения Шредингера, описывающие преобразование непрерывного сигнала постоянной амплитуды в оптическом волокне в периодическую последовательность импульсов. Проведен анализ этих решений для различных частот и типов начальной модуляции, показывающий, что существует оптимальная длина волокна для такого преобразования. При больших длинах волокна происходит возврат поля к начальному состоянию. Показано, что форма импульсов на выходе волокна помимо его длины зависит еще от частоты и типа начальной модуляции непрерывного сигнала. Приведены результаты численных расчетов формы импульсов на выходе волокна по найденным точным формулам.

1. Введение

В работах [1, 2] указывалось на возможность получения последовательности пикосекундных импульсов в оптическом волокне при возбуждении его непрерывным лазерным излучением. Распад непрерывного сигнала на периодическую последовательность импульсов обусловлен нелинейной зависимостью показателя преломления материала волокна от величины оптического поля и является следствием модуляционной неустойчивости волны с постоянной амплитудой относительно периодических возмущений. Однако в работе [1] эволюция решения после начальной стадии роста возмущения исследовалась лишь методами численного эксперимента, возможности которого ограничены представлением решения лишь при конечном числе начальных условий и не дают возможности выявить в полной мере общие закономерности явления. Авторы работы [2] ограничились рассмотрением начальной стадии роста периодических возмущений. В данной работе нами найдены точные аналитические решения указанной задачи для различных типов начальной периодической модуляции исходной волны с постоянной амплитудой и соответственно приведены формулы для формы получаемых импульсов.

С математической точки зрения задача сводится к нахождению периодических решений нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) и в этом смысле представляет общий интерес для широкого класса задач современной математической физики. Модуляционная неустойчивость решений НУШ в виде плоской волны с постоянной амплитудой рассматривалась в теории самофокусировки [3, 4], в задаче о самомодуляции волны в нелинейной диспергирующей среде [5], в теории волны на глубокой воде [6] и др., однако точного решения задачи до сих пор найдено не было, хотя такие попытки и предпринимались [7]. Численные эксперименты, проведенные в работах [5–7], позволили установить важную особенность задачи: решение с начальной периодической модуляцией по пространственной переменной является периодическим и по временной переменной¹⁾, так что через некоторое время происходит возврат к начальному распределению поля — постоянной амплитуде с малой модуляцией, аналогичный явлению возврата Ферми — Пасть — Улама [8]. Наши точные решения

¹⁾ В случае оптического волокна пространственная и временная переменные меняются ролями.

подтверждают этот вывод в случае простой гармонической начальной модуляции и дают возможность установить, в каких случаях оно имеет место при более сложных типах модуляции.

Для решения НУШ с заданными начальными условиями существует ставший уже классическим аппарат обратной задачи рассеяния [9]. Тем не менее в случае периодических начальных условий имеется ряд особенностей, для учета которых были разработаны специальные методы с применением конечнозонных операторов [10–12]. Однако общие явные формулы для решения [10], получаемые этим методом, весьма сложны для анализа и не дают решения нашей задачи. Мы искали решения прямыми методами, отчасти основанными на результатах численного моделирования, но в данной работе не описываем сами методы из-за чрезмерной громоздкости. Здесь мы сосредоточили внимание на простейшем анализе решений, а также на результатах и выводах, которые следуют из найденных точных решений в приложении к распространению волн в оптическом волокне. Сами же решения относительно просто проверяются непосредственной подстановкой в исходное уравнение и в этом смысле не требуют дополнительных разъяснений.

Последовательность изложения в работе следующая. Во втором разделе дана постановка задачи о генерации микросекундных импульсов в одномодовом оптическом волокне на длинах волн, близких к минимуму поглощения. В третьем разделе получено точное решение этой задачи для простой гармонической модуляции входного сигнала. В четвертом разделе обсуждаются вопросы модуляции сложным сигналом при наличии высших гармоник основной частоты и приведено точное решение для относительно простого случая модуляции двумя первыми гармониками. Результаты численных расчетов формы импульсов на выходе волокна по найденным формулам и простейшие оценки на их основе составляют содержание пятого раздела работы. В шестом разделе дана сводка полученных результатов.

2. Постановка задачи

В ряде работ (см., например, обзоры [13–15]) было показано, что на частотах возбуждения одномодового оптического волокна из кварцевого стекла вблизи минимума поглощения и отрицательной групповой дисперсии при сравнительно небольшой полной мощности излучения должно сказываться самовоздействие волны, связанное с нелинейной зависимостью показателя преломления кварца от поля волны:

$$n = n_0 + n_2 |E|^2, \quad (1)$$

где n_0 – показатель преломления материала волокна, n_2 – нелинейный коэффициент. Из-за малости групповой дисперсии в рассматриваемой области частот величины электрического поля, при которых необходимо учитывать (1), намного меньше порога самофокусировки и само поле можно аппроксимировать формулой [13]

$$E(r, x, t) = \operatorname{Re}[\varphi(x, t) R(r) \exp i(kx - \omega t)], \quad (2)$$

где x – продольная координата, t – время, ω – частота возбуждения, k – волновое число, $R(r)$ – радиальная собственная функция линейной задачи, $\varphi(x, t)$ – огибающая оптического поля. Функция $\varphi(x, t)$ в пренебрежении поглощением в волокне и дисперсией высших порядков должна удовлетворять НУШ [13]

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + |\psi|^2 \psi = 0, \quad (3)$$

которое выписано здесь в безразмерном виде благодаря переходу к новым переменным

$$\xi = q^2 \frac{x}{\lambda}, \quad \tau = q(-\lambda k'')^{-1} \left(t - \frac{x}{v} \right), \quad \psi = \frac{(\pi n_2)^{1/2}}{q} \varphi, \quad (4)$$

где

$$\lambda = 2\pi c/\omega, \quad k'' = \partial^2 k / \partial \omega^2, \quad v = \partial \omega / \partial k,$$

q — нормировочный множитель, определяющий связь между амплитудой сигнала и характерными временными и пространственными изменениями поля в волокне.

Для удобства дальнейшего анализа введем функцию $u(\xi, \tau)$, связанную с ψ соотношением

$$\psi(\xi, \tau) = u(\xi, \tau) \exp i\xi.$$

В этом случае в функции u остается лишь медленная зависимость от переменной ξ , и уравнение для u запишется в виде

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - u + |u|^2 u = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) допускает солитонное решение:

$$u = \sqrt{2} \operatorname{ch} \sqrt{2}(\tau - \tau_0), \quad (6)$$

где τ_0 — координата центра солитона, рассмотрению которого применительно к распространению оптических импульсов в волокне было посвящено значительное число работ (см. ссылки в обзорах [13–15], а также работу [16], в которой солитоны в волокне наблюдались впервые).

Уравнение (5) имеет, кроме того, простейшее решение в виде комплексной константы $u = \exp i\varphi$, описывающее стационарную волну с единичной амплитудой и произвольной фазой φ . Известно [1–7], что такое стационарное решение является неустойчивым относительно длиноволновых периодических возмущений и эти возмущения экспоненциально нарастают в процессе распространения волны вдоль волокна (с ростом ξ). Действительно, пусть волна на входе в волокно слабо модулирована:

$$u = \left[1 + \sum_{j=1}^n a_j(\xi) \cos j\chi(\tau - \tau_{0j}) \right] \exp i\varphi, \quad (7)$$

где a_j — фурье-коэффициенты периодической модуляции, которые на начальном этапе роста возмущения будем считать малыми: $|a_j| \ll 1$, χ — частота внешней модуляции, n — число гармоник основной частоты во входном сигнале, τ_{0j} — начальная фаза j -й гармоники. Тогда, подставляя (7) в уравнение (5) и ограничиваясь линейными членами по a_j , можно показать, что эти коэффициенты имеют вид

$$a_j(\xi) = A_j [j\chi/2 + i(1 - j^2\chi^2/4)^{1/2}] \exp(\delta_j \xi) + B_j [j\chi/2 - i(1 - j^2\chi^2/4)^{1/2}] \exp(-\delta_j \xi) = \\ = A_j \exp(i\alpha_j + \delta_j \xi) + B_j \exp(-i\alpha_j - \delta_j \xi), \quad (8)$$

где

$$\operatorname{tg} \alpha_j = 2\delta_j/j^2\chi^2, \quad \delta_j = j\chi(1 - j^2\chi^2/4)^{1/2},$$

δ_j — инкремент нарастания j -й гармоники возмущения, который действителен в интервале частот $0 < j\chi < 2$; A_j и B_j — действительные постоянные коэффициенты для начальных значений ξ , удовлетворяющие условиям

$$|A_j \exp(\delta_j \xi)| \ll 1, \quad |B_j \exp(-\delta_j \xi)| \ll 1.$$

Инкремент нарастания неустойчивости δ_j максимальен при $\chi = \sqrt{2}$, и обычно в задачах о модуляционной неустойчивости при исследовании роста возмущений ограничиваются только основной гармоникой возмуще-

ния с этим значением x . Остальные δ , в этом случае чисто мнимы. В случае оптического волновода имеется возможность предварительной модуляции непрерывного излучения на входе с заданными периодом и амплитудой. Учитывая это обстоятельство, ниже мы исследуем решения уравнения (5) при произвольном значении x . Как мы увидим, предварительная модуляция дает возможность управлять не только периодом повторения импульсов, но и их формой, длительностью и никовым значением амплитуды.

3. Простая гармоническая начальная модуляция

Рассмотрим сначала простейшую ситуацию, когда $0 < x < 2$ и $n = 1$, т. е. осуществляется чисто гармоническая начальная модуляция, имеющая действительный инкремент нарастания δ_1 . Будем пока рассматривать только растущие возмущения, и коэффициент B_1 в (8) положим равным нулю. Для реализации возмущений, растущих чисто экспоненциально, как видно из (8), нужна комплексная модуляция, т. е. как амплитудная, так и фазовая, с соотношением глубин модуляции, определяемым величиной α_1 . Это ограничение позволяет найти точное решение НУШ с начальным условием (7). Однако если использовать чисто амплитудную или чисто фазовую модуляцию, то решение будет близко к найденному и форма получаемых импульсов в итоге мало будет зависеть от типа модуляции. Точным (и единственным) решением уравнения (5) при $\xi \rightarrow -\infty$, имеющим предел (7), в котором $B_1=0$, $n=1$, является следующая функция:

$$u(\xi, \tau) = \left[1 - \frac{\frac{1}{2}px^2 \operatorname{ch} \delta_1(\xi - \xi_{01}) + ip\delta_1 \operatorname{sh} \delta_1(\xi - \xi_{01})}{p \operatorname{ch} \delta_1(\xi - \xi_{01}) - \cos x(\tau - \tau_{01})} \right] \exp i\varphi', \quad (9)$$

где

$$p = x/\delta_1, \quad \varphi' = \varphi - \arccos(1 - x^2/2),$$

постоянная ξ_{01} связана с A_1 соотношением $A_1 = \delta_1 \exp(-\delta_1 \xi_{01})$. Метода получения (9) мы здесь не приводим, однако непосредственной подстановкой в (5) можно убедиться, что эта функция действительно является решением НУШ.

Из (9) можно видеть, что начальное ($\xi \rightarrow -\infty$) стационарное состояние $\exp i\varphi$ в результате развития неустойчивости приобретает модуляцию, глубина которой линейно возрастает до некоторого максимума при $\xi = \xi_{01}$, а затем при $\xi \rightarrow \infty$ происходит возврат к стационарному решению с другой фазой $u = \exp i[\varphi + \Delta\varphi_1(x)]$, т. е. решение (9) возвращает состояние поля к исходному с прежней единичной амплитудой, но с фазой, повернутой относительно начальной на величину $\Delta\varphi_1(x) = 2 \arccos(x^2/2 - 1)$. В завершающей стадии процесса при $\xi \rightarrow \infty$ линейный член разложения (9) по малому параметру $\exp[-\delta_1(\xi - \xi_{01})]$ вновь совпадает с (7), в котором теперь уже $A_1 = 0$, $B_1 = \delta_1 \exp \delta_1 \xi_{01}$ и фаза φ имеет новое значение $\varphi + \Delta\varphi_1(x)$. Таким образом, экспоненциально спадающее слагаемое в формуле (8), которым обычно в работах по модуляционной неустойчивости пренебрегали, имеет реальный физический смысл.

Когда $x \rightarrow 0$, период по τ увеличивается до бесконечности и в пределе из (9) мы получим решение НУШ в виде рациональной дроби:

$$u(\xi, \tau) = \left[1 - 4 \frac{1 + 2i(\xi - \xi_{01})}{1 + 4(\tau - \tau_{01})^2 + 4(\xi - \xi_{01})^2} \right] \exp i\varphi'. \quad (10)$$

Для этого решения распределение поля по τ имеет вид одиночного «темнового» импульса на фоне непрерывного сигнала, изменяющего свою форму при изменении ξ . При $\xi \rightarrow \infty$ импульс исчезает и восстанавливается первоначальное стационарное поле. Такое решение, однако, реализуется при $\delta_1 \rightarrow 0$, и происходит не экспоненциальный, а степенной рост начального возмущения. Поэтому реализация этого решения в оптических волноводах

дах в чистом виде вряд ли возможна. Тем не менее форма генерируемых импульсов, как показывают расчеты, близка к (10) уже при $\kappa \leq 0,5$, и эту формулу можно использовать для приближенных практических вычислений, учитывая, что импульсы повторяются с частотой κ .

Отметим особо случай $\kappa = \sqrt{2}$, когда инкремент нарастания неустойчивости δ_1 максимальен. Именно этот случай исследовался ранее в работах по модуляционной неустойчивости. Решение (9) в этом случае упрощается и принимает вид

$$u(\xi, \tau) = \frac{\cos \sqrt{2}(\tau - \tau_{01}) + i\sqrt{2} \operatorname{sh}(\xi - \xi_{01})}{\cos \sqrt{2}(\tau - \tau_{01}) - i\sqrt{2} \operatorname{ch}(\xi - \xi_{01})} \exp i\varphi', \quad (11)$$

а траектории, описываемые этим решением, переводят начальное состояние $u = \exp i(\varphi' + \pi/2)$ в конечное $u = \exp i(\varphi' - \pi/2)$, так что полный угол поворота фазы равен в точности π .

4. Начальная модуляция сложным периодическим сигналом

В области значений $0 < \kappa < 1$ неустойчивой оказывается не только основная мода возмущения, но и ее гармоника с частотой 2κ , поэтому в модулирующей функции сложной формы необходимо учитывать уже две первые гармоники. В результате эволюции такого возмущения форма сигнала остается периодической по τ и зависящей как от относительной разности фаз двух гармоник, так и от отношения их начальных амплитуд. Точное решение уравнения (5) в области $0 < \kappa < 1$, имеющее пределом при $\xi \rightarrow -\infty$ формулу (7), в которой $n=2$, $B_1=0$, $B_2=0$, можно записать в виде

$$u(\xi, \tau) = [1 - (G + iH)/D] \exp i\varphi'', \quad (12)$$

$$\begin{aligned} G = & (\kappa^2/4\delta_1) \operatorname{ch} \delta_1(\xi - \xi_{01}) \cos 2\kappa(\tau - \tau_{02}) + \\ & + (2\kappa^2/\delta_2) \operatorname{ch} \delta_2(\xi - \xi_{02}) \cos \kappa(\tau - \tau_{01}) + \\ & + (3\kappa^3/2\delta_1\delta_2) \operatorname{ch} \delta_1(\xi - \xi_{01}) \operatorname{ch} \delta_2(\xi - \xi_{02}), \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} H = & {1}/{2} \operatorname{sh} \delta_1(\xi - \xi_{01}) \cos 2\kappa(\tau - \tau_{02}) + \operatorname{sh} \delta_2(\xi - \xi_{02}) \cos \kappa(\tau - \tau_{01}) - \\ & - (\kappa/\delta_1\delta_2) [\delta_1 \operatorname{sh} \delta_1(\xi - \xi_{01}) \operatorname{ch} \delta_2(\xi - \xi_{02}) \\ & - \delta_2 \operatorname{ch} \delta_1(\xi - \xi_{01}) \operatorname{sh} \delta_2(\xi - \xi_{02})], \end{aligned} \quad (12b)$$

$$\begin{aligned} D = & (3/4\kappa) [\cos \kappa(\tau + \tau_{01} - 2\tau_{02}) + {1}/{\kappa} \cos \kappa(3\tau - 2\tau_{02} - \tau_{01})] + \\ & + (1/2\delta_1) \operatorname{ch} \delta_1(\xi - \xi_{01}) \cos 2\kappa(\tau - \tau_{02}) + \\ & + (1/\delta_2) \operatorname{ch} \delta_2(\xi - \xi_{02}) \cos \kappa(\tau - \tau_{01}) - \\ & - (2/3\kappa) \{ [\kappa^2(2\kappa^2 - 5)/2\delta_1\delta_2] \operatorname{ch} \delta_1(\xi - \xi_{01}) \operatorname{ch} \delta_2(\xi - \xi_{02}) + \\ & + \operatorname{sh} \delta_1(\xi - \xi_{01}) \operatorname{sh} \delta_2(\xi - \xi_{02}) \}, \end{aligned} \quad (12c)$$

где

$$\varphi'' = \varphi - \arccos [\delta_1\delta_2 - (\kappa^2/2 - 1)(2\kappa^2 - 1)],$$

а константы ξ_{01} и ξ_{02} связаны с начальными амплитудами в разложении (7) соотношениями

$$A_1 = \delta_1 \exp(-\delta_1 \xi_{01}), \quad A_2 = \delta_2 \exp(-\delta_2 \xi_{02}).$$

Нетрудно показать, что конечным состоянием поля, определяемого решением (12) при $\xi \rightarrow \infty$, также является волна с единичной амплитудой, причем полный поворот фазы в данном случае равен сумме поворотов, осу-

ществляемых элементарными решениями (9):

$$\Delta\varphi_2(x) = \Delta\varphi_1(x) + \Delta\varphi_1(2x), \quad (13)$$

так что

$$u(\xi \rightarrow \infty, \tau) = \exp(\varphi + \Delta\varphi_2(x)).$$

Величины ξ_{01} и ξ_{02} в решении (12) являются, по существу, центрами двух элементарных решений (9), нелинейное взаимодействие которых приводит к решению (12). При совпадении центров $\xi_{01} = \xi_{02} = 0$, т. е. в случае $A_1 = \delta_1$, $A_2 = \delta_2$, решение (12) с фазой $\varphi'' = 0$ оказывается симметричным относительно изменения знака ξ :

$$u(\xi, \tau) = u^*(-\xi, \tau).$$

Если центры элементарных решений разнесены на большое расстояние по оси ξ , то (12) распадается на сумму двух элементарных решений (9), каждое со своей фазой φ' , аналогично тому, как это имеет место для двух-солитонных решений НУШ, когда центры солитонов разнесены на расстояния, превышающие характерные размеры каждого из них.

Отметим, что в случае $x = 2/\sqrt{5}$ инкременты нарастания двух гармоник совпадают: $\delta_1 = \delta_2 = 1/5$, и решение (12) упрощается. Выпишем здесь лишь симметричное решение ($\xi_{01} = \xi_{02} = 0$):

$$u(\xi, \tau) = -\frac{\operatorname{ch}^2 \sqrt{5}\xi + P(\tau) \operatorname{ch} \sqrt{5}\xi - C(\tau) + iF(\tau) \operatorname{sh} \sqrt{5}\xi}{\operatorname{ch}^2 \sqrt{5}\xi + F(\tau) \operatorname{ch} \sqrt{5}\xi + C(\tau)} \exp i\varphi'', \quad (14)$$

$$P(\tau) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[2 \cos \frac{2}{\sqrt{5}}(\tau - \tau_{01}) - \cos \frac{4}{\sqrt{5}}(\tau - \tau_{02}) \right], \quad (14a)$$

$$F(\tau) = \frac{4}{3\sqrt{5}} \left[2 \cos \frac{2}{\sqrt{5}}(\tau - \tau_{01}) + \cos \frac{4}{\sqrt{5}}(\tau - \tau_{02}) \right], \quad (14b)$$

$$C(\tau) = \left[\frac{8}{9} + \cos \frac{2}{\sqrt{5}}(\tau + \tau_{01} - 2\tau_{02}) + \frac{1}{9} \cos \frac{4}{\sqrt{5}}(3\tau - \tau_{01} - 2\tau_{02}) \right]. \quad (14c)$$

Полный поворот фазы, осуществляемый решением (14), равен в точности 2π .

Решение (12) в случае $\tau_{01} = \pi/x$, $\tau_{02} = 0$ допускает предельный переход $x \rightarrow 0$. При этом мы получим второе решение НУШ в виде рациональной дроби более высокого порядка, чем (11):

$$u(\xi, \tau) = [1 - (G_1 + iH_1)/D_1] \exp i\varphi''. \quad (15)$$

$$G_1 = 5\xi^4 + 6\xi^2\tau^2 + \tau^4 + 9/2\xi^2 + 3/2\tau^2 - 3/16, \quad (15a)$$

$$H_1 = \xi [2\xi^4 + 4\xi^2\tau^2 + 2\tau^4 + \xi^2 - 3\tau^2 - 1/8], \quad (15b)$$

$$D_1 = 1/\sqrt{5}\xi^6 + \xi^4\tau^2 + 2\xi^2\tau^4 + 1/\sqrt{5}\tau^6 + 9/16\xi^4 - 3/2\xi^2\tau^2 + 1/\sqrt{5}\tau^4 + 33/16\xi^2 + 9/16\tau^2 + 3/8.. \quad (15c)$$

Для простоты мы положили в (15) $\xi_{01} = \xi_{02} = 0$.

При попадании частоты модуляции в интервал $0 < x < 2/n$, где n – целое число, неустойчивыми оказываются n гармоник основной частоты модуляции, и дополнительно к рассмотренным могут существовать более сложные по структуре n -модовые сепаратрисные решения. Построение такого рода точных аналитических решений принципиально возможно, но, по-видимому, неконструктивно из-за быстрого возрастания с увеличением n громоздкости как расчетов, так и конечных формул. Более простым подходом в этом случае оказывается численное моделирование таких многомодовых решений на основе исходного уравнения (5). Примеры реализации подобного рода решений в численном эксперименте проводятся

лись, например, в работе [6]. Здесь мы отметим, однако, ряд особенностей таких решений, которые дополнительно необходимо принимать во внимание при их реализации, поскольку в данной задаче при $n \geq 2$ малое изменение начальных условий может привести к сильному изменению последующей эволюции поля, что в конечном итоге приведет к сложному и трудноанализируемому поведению решения.

1) Для сепаратрисных n -модовых решений первый член разложения решения при $\xi \rightarrow -\infty$ имеет вид суммы n элементарных экспоненциально нарастающих возмущений вида (7), где $B_i=0$, а коэффициенты $A_i = -\delta_i \exp(-\delta_i \xi_0)$ произвольны. Соответственно при $\xi \rightarrow \infty$ решение представляет собой n элементарных экспоненциально убывающих возмущений вида (7), где $A_i=0$, $B_i \neq 0$ и фаза φ имеет значение, отличное от начального.

2) Полный поворот фазы $\Delta\varphi_n(x)$ сепаратрисного решения при изменении ξ от $-\infty$ до ∞ равен сумме поворотов, осуществляемых элементарными решениями (9), т. е.

$$\Delta\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^n \Delta\varphi_j(jx) \quad (16)$$

независимо от соотношения коэффициентов A_i , задаваемых в начальных условиях.

3) Если выбрать коэффициенты $A_i = \delta_i$ так, что все $\xi_0 = 0$, то полное решение окажется симметризованным по переменной ξ , т. е. найдется такое значение фазы φ , что $u(\xi, t) = u(-\xi, t)$. При сильно разнесенных по оси ξ значениях ξ_0 полное решение разбивается на сумму n элементарных решений (9).

Выше мы рассмотрели ситуацию, когда все B_i в (7), (8) в точности равны нулю, что позволяет выделить сепаратрисные решения. В том же случае, когда начальное состояние не лежит на сепаратрисной траектории, полное решение будет многопериодическим по переменной ξ , причем в общем случае периоды несоразмерны и это приводит в определенном смысле к хаотическим решениям, не дающим возврата к исходному состоянию поля. Поэтому в случае n -модовых решений при $n \geq 2$ явление возврата поля к исходному состоянию, аналогичное явлению возврата Ферми – Насты – Улама при возбуждении системы нелинейных осцилляторов, будет иметь место лишь для сепаратрисных решений.

5. Результаты численных расчетов и оценки

Рассмотрим сначала случай простой гармонической модуляции входного сигнала. Форма импульсов, рассчитанная с помощью формулы (9) при различных x , приведена на рис. 1. Форма импульсов имеет наименьшую ширину и наибольшую амплитуду при $\xi = \xi_0$. Длина волокна, необходимая для установления нужной формы импульсов, определяется средней мощностью накачки, амплитудой и частотой начальной модуляции. Все следующие ниже оценки проведены для кварцевого одномодового волокна [13] на длине волны излучения $\lambda = 1,55$ мкм. Для кварца на этой длине волны $n_0 \approx 1,5$, $n_2 \approx 1,2 \cdot 10^{-22}$ (м/В)², дисперсия групповой скорости $D = (2\pi c/\lambda^2) (\partial^2 k / \partial \omega^2) = -16$ пс/нм · км, откуда $\partial^2 k / \partial \omega^2 \approx -2 \cdot 10^{-26}$ с²/м. Глубина начальной модуляции определяется из линейного разложения (7) как

$$M(\xi) = A_1 \exp \delta_1 \xi = \delta_1 \exp \delta_1 (\xi - \xi_0).$$

Глубина модуляции при заданном ξ , очевидно, зависит от x . Выберем для оценок значение $x = \sqrt{2}$, при котором инкремент нарастания максимальен. В этом случае скважность импульсов, т. е. отношение периода следования к ширине каждого импульса на уровне 0,5 от никовой мощности, при-

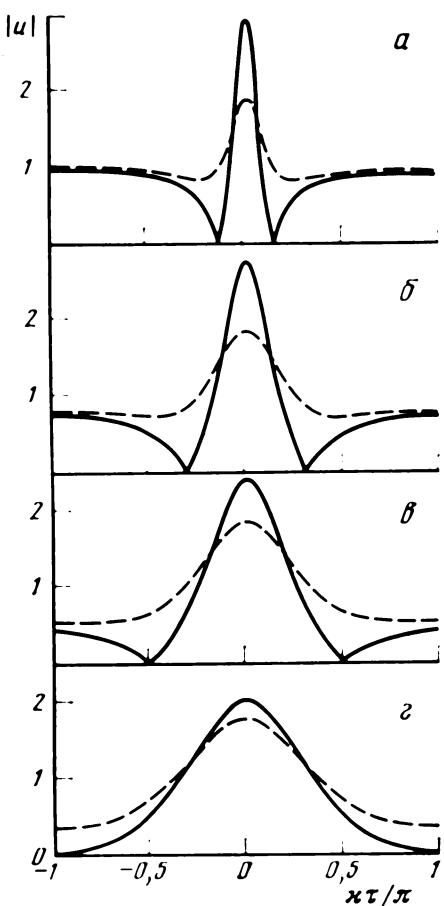


Рис. 1

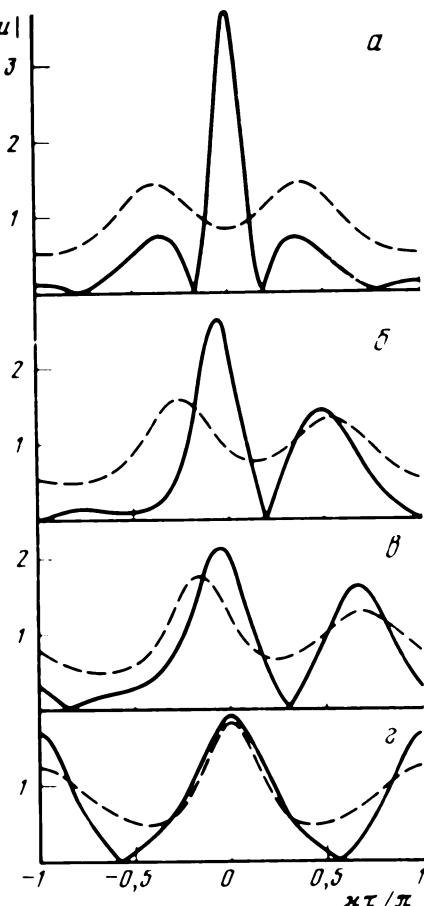


Рис. 3

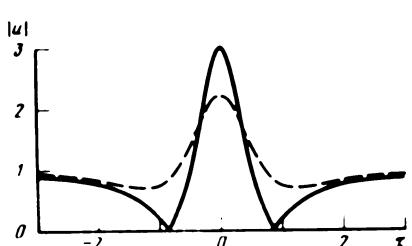


Рис. 2

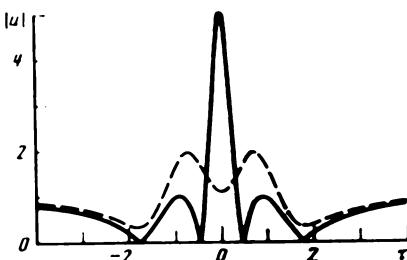


Рис. 4

Рис. 1. Форма импульсов на выходе волокна при простой гармонической модуляции входного сигнала. Величины параметров: $\xi - \xi_{01} = 0$ (сплошные кривые), $\pm 0,75$ (штрихи), $\tau_{01} = 0$, $x = 0,5$ (а), 1 (б), $1\frac{1}{2}$ (в), $1\frac{3}{4}$ (г)

Рис. 2. Форма одиночных импульсов на выходе волокна в пределе больших периодов модуляции ($x \rightarrow 0$). Величины параметров: $\tau_{01} = 0$, $\xi - \xi_{01} = 0$ (сплошная кривая), $\pm 0,5$ (штрихи)

Рис. 3. Форма импульсов на выходе волокна при начальной модуляции двумя первыми гармониками частоты $x = 2/\sqrt{5}$. Величины параметров: $\xi = 0$ (сплошные кривые), ± 2 (штрихи), $\tau_{01} = \pi/x$, $x\tau_{02}/\pi = 0$ (а), $1/8$ (б), $1/4$ (в), $1/2$ (г)

Рис. 4. Форма одиночных импульсов сложной формы при $x \rightarrow 0$. Величины параметров: $\xi = 0$ (сплошная кривая), $\pm 0,5$ (штрихи)

близительно равно 6. Начальной глубине модуляции $M(\xi) \approx 5\%$ соответствует $\xi - \xi_0 \approx -3,0$, и при периоде следования импульсов, например 6 пс, значение параметра $q \approx 1,33 \cdot 10^{-4}$, длина волокна, требуемая для получения наименьшей ширины импульса, составляет около 260 м, а средняя мощность непрерывного сигнала на входе в волокно сечением 20 мкм^2 равна 1,9 Вт. Длительность каждого импульса в рассматриваемом случае оказывается равной 1 пс. С уменьшением x растет также и скважность импульсов, и, например, при $x=0,5$ она равна 20. Но при этом уменьшается инкремент нарастания δ , и необходимая длина волокна для получения импульсов оптимальной формы также растет. Отметим также, что существует максимальный предел периода следования импульсов ≈ 250 пс [1], связанный с наличием в волокне конкурирующего процесса ВРМБ. При уменьшении частоты модуляции x между импульсами возникает фон непрерывного сигнала с амплитудой, приближающейся к амплитуде начакки, и отдельные импульсы имеют форму, описываемую формулой (10) уже при $x \leq 0,5$ с точностью $\approx 3\%$. Форма этих импульсов приведена на рис. 2. Фон между импульсами отсутствует при фиксированной частоте $x = \sqrt{3}$. Итак, в случае простой гармонической модуляции формой и скважностью импульсов на выходе волокна можно управлять средней мощностью непрерывного сигнала на входе и частотой предварительной модуляции.

Если $x < 1$, то на входе в волокно можно осуществлять модуляцию волны двумя гармониками. В этом случае появляется возможность управлять формой выходных импульсов, помимо частоты модуляции и мощности непрерывного сигнала, сдвигом фаз τ_{01} и τ_{02} двух гармоник модуляции, а также параметром $\xi_{01} - \xi_{02}$, эквивалентным соотношению глубин модуляции гармоник. Ниже мы рассмотрим лишь зависимость формы импульсов от τ_{01} и τ_{02} для случая $x = 2/\sqrt{5}$. На рис. 3 приведены формы импульсов, рассчитанные с помощью формулы (14). Из рисунка видно, что в двух случаях: $\tau_{01} = \pi/x$, $\tau_{02} = 0$ и $\tau_{01} = \pi/x$, $\tau_{02} = \pi/2x$, форма импульсов на выходе волокна симметрична по t внутри каждого периода. Наибольшая амплитуда и наименьшая ширина импульса имеют место при $\tau_{01} = \pi/x$, $\tau_{02} = 0$.

Если выбрать меньшие значения x , то импульс обостряется: растет амплитуда и убывает его ширина. Форма импульса при $x \rightarrow 0$, рассчитанная с помощью формулы (15), представлена на рис. 4. Однако острый максимум быстро пропадает при изменении ξ в пределах $\pm 0,2$ вокруг значения $\xi = 0$. Поэтому в данном случае при заданной длине волокна необходимо точно устанавливать амплитуду модуляции. В рассматриваемом случае глубины модуляции двух гармоник совпадают:

$$M_1(\xi) = M_2(\xi) = A_1 \exp \delta_1 \xi = A_2 \exp \delta_2 \xi = \delta_1 \exp \delta_1 \xi,$$

где $\delta_1 = \delta_2 = \gamma_3$. Для импульсов, изображенных на рис. 3, *a*, скважность равна 16. Для сохранения периода повторения импульсов 6 пс значение q должно быть равно $2,1 \cdot 10^{-4}$. При той же длине волокна 260 м для установления оптимальной формы импульсов ξ должно равняться $-7,4$. Отсюда находим требуемую мощность непрерывного сигнала $\approx 4,7$ Вт и глубину модуляции $M_1(\xi) \approx 0,22\%$.

Проведенное рассмотрение показывает, что в случае $n=2$ при заданной частоте модуляции, меняя среднюю мощность, глубину модуляции и число гармоник, можно получать три типа импульсов, изображенных на рис. 1, *b*, 3, *a* и 3, *g*. Кроме того, существует возможность модулирования формы импульсов изменением параметра $\xi_{01} - \xi_{02}$, эквивалентного отношению глубин модуляции $M_1(\xi)$ и $M_2(\xi)$. В случае же меньших x при $n > 2$ многообразие форм импульсов на выходе волокна возрастает. Это явление может быть использовано, например, в линиях связи и позволяет менять код передачи незначительным изменением начальных условий.

Отметим также, что при необходимости длительность генерируемых импульсов может быть сокращена до десятков фемтосекунд.

6. Заключение

Рассмотренный нами процесс преобразования непрерывного излучения в оптическом волокне в последовательность коротких импульсов открывает новые возможности в создании оптоэлектронных приборов на основе оптического волокна. Помимо получения ультракоротких импульсов отмечим здесь возможность преобразования частоты ИК излучения в боковые частоты, сдвинутые относительно центральной на частоту модуляции. Таким образом, волокно может служить устройством для перестройки частоты ИК излучения. Полученные в данной работе результаты могут быть применены и в теории оптической связи. Возможность получения на выходе волокна импульсов необходимой наперед заданной формы, управляемой типом модуляции непрерывного излучения на входе, дает возможность задавать таким образом код передачи. Сами же точные решения (9)–(12), (14) и (15), полученные нами для ИМШ, могут оказаться полезными и в других физических задачах с периодическими начальными условиями: в теории двумерной самофокусировки, теории волн на глубокой воде и др.

Литература

1. Hasegawa A. Opt. Lett., 1984, **9**, 288.
2. Anderson D., Lisak M. Opt. Lett., 1984, **9**, 408.
3. Беспалов В. И., Таланов В. И. Письма в ЖЭТФ, 1966, **3**, 471.
4. Ландau Л. Д., Либшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982, с. 520.
5. Лигвак А. Г., Таланов В. И. Изв. вузов, Радиофизика, 1967, **10**, 537.
6. Юэн Г., Лайк Б. В сб.: Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрина и Э. Скотта. М.: Мир, 1981, с. 103.
7. Tracy E. R., Chen H. H., Lee Y. C. Phys. Rev. Lett., 1984, **53**, 218.
8. Ферми Э. Научные труды, Т. 2. М.: Наука, 1972, с. 647.
9. Захаров В. Е., Шабат А. Е. ЖЭТФ, 1971, **61**, 118.
10. Итс А. Р., Коголяров В. Н. ДАН УССР, Сер. А, 1976, **11**, 965.
11. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. Н., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
12. Ma Y. C., Ablowitz M. J. Stud. Appl. Math., 1981, **65**, 113.
13. Хасогашвили А., Кодама Ю. ТИЭР, 1981, **69**, 57.
14. Выслуга В. А. УФН, 1982, **136**, 519.
15. Mollenauer L. F., Stolen R. H. Fiberoptic Techn., 1982, **4**, 193.
16. Mollenauer L. F., Stolen R. H., Gordon J. P. Phys. Rev. Lett., 1980, **45**, 1095.

Поступила в редакцию
24.IV.1985

GENERATION OF A PERIODIC SEQUENCE OF PICOSECOND PULSES IN AN OPTICAL FIBER. EXACT SOLUTIONS

N. N. Akhmediev, V. M. Yelensky, N. E. Kulagin

Exact analytic solutions of the nonlinear Schrödinger equation are obtained which describe the transformation of a continuous signal of fixed amplitude in an optical fiber into a periodic sequence of pulses. The solutions are analyzed in the phase plane for various frequencies and types of initial modulation. From the analysis it follows that there exists an optimal fiber length for such transformations. For larger fiber lengths the field reverses to the initial state. It is shown that the shape of the pulses at the fiber exit, beside depending on the length of the fiber, also depends on the frequency and type of initial modulation of the continuous signal. Results of numerical calculations of the pulse shape at the fiber exit obtained by employing the exact formulas are presented.